

Lycée Laymoun

2<sup>ème</sup> BAC. Pro

Fonctions exponentielles.

M. YAZOUGH

① fonction exponentielle népérienne:

Déf: la fonction exponentielle népérienne, notée  $e^x$  (ou  $\exp(x)$ ) est la fonction réciproque de la fonction:  $x \mapsto \ln(x)$

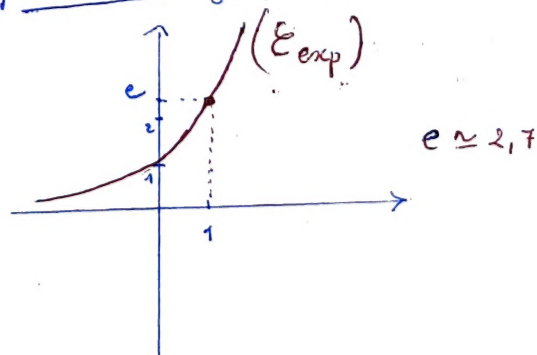
•  $x \mapsto e^x$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$

② Propriétés élémentaires:

$$e^0 = 1; e^1 = e; (\forall x \in \mathbb{R}), e^x > 0$$

$$\dots \forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(e^x) = x$$

$$\dots \forall x > 0 \quad e^{\ln(x)} = x$$

③ Représentation graphique:④ Propriétés et déductions:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, e^{x+y} = e^x e^y$$

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) (\forall r \in \mathbb{Q}) \text{ on a:}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}; e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^{rx} = (e^x)^r$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}^* \\ y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$$

①

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \\ e^x > e^y \Leftrightarrow x > y \end{array} \right\}$$

EX:1 Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les eq:

1°)  $e^{2x-1} = e^{x+1}$

2°)  $e^{x-1} = 3$

3°)  $e^{x^2+x-2} = 1$

4°)  $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$

5°)  $e^{3x+1} = -2$

⑤ Domaine de définition:si  $f(x) = e^{u(x)}$  on a:

$$D_f = D_u = \{x \in \mathbb{R}; u(x) \in \mathbb{R}\}$$

EX:2 Donner le domaine de définition des fcts:

1°/  $f(x) = e^{\sqrt{x-2}}$

2°/  $g(x) = e^{\sqrt{\frac{1}{x}-3}}$

3°/  $h(x) = e^{x \ln(x^2-9)}$

⑥ Dérivabilités:

$$\diamond \forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = e^x$$

$\diamond$  si  $u$  est dérivable sur  $I$  alors

$$(\forall x \in I) \quad (e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)}$$

EX:3 Calculer la dériv de  $f$  ds chaque cas:

1°/  $f(x) = e^{x^3-2x+1}$

2°/  $f(x) = e^{x \sin(x)}$

3°/  $f(x) = e^{\sqrt{x+4}}$

## ⑦ Limites essentielles :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$(\forall n \geq 1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

EX : 4 Calculer les limites :

$$1^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) \quad 5^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x e^{-x}}$$

$$2^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-x} - x) \quad 6^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$3^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - e^x + 1)$$

$$4^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{2x}}{x - 2}$$

## ⑧ Fonction exponentielle de base $a$ . $a \in \mathbb{R}_+^* \neq 1$ .

Déf : pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a :

$$a^x = e^{x \ln(a)}$$

$$\text{et } \log_a(a^x) = x$$

propriétés :

$$\forall x \in ]0, +\infty[ ; a^{\log_a(x)} = x$$

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y > 0 \quad a^x = y \Leftrightarrow \log_a(y) = x$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathbb{Q} :$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^r = a^{rx} ; \quad \frac{1}{a^x} = a^{-x}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

②

$$\forall x > 0 ; (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln(a)}$$

EX : 5

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + \ln(e^x - 1)$$

1° Déterminer  $D_g$ .

2° Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $g(x) = 0$

3° calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

EX : 6 (EXAM. BAC. 2018)

$$f(x) = (e^x - 1)^2$$

1) calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et donner une interprétation du résultat.

2) calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

puis donner une interprétation du résultat.

→ on peut utiliser :

$$(e^x - 1)^2 = e^x(e^x - 2) + 1$$

3) Mq :  $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = 2(e^x - 1)e^x$

4) Etudier le signe de  $f'(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f$ .

5) Déterminer l'abscisse du pt d'intersection de  $(C_f)$  et la droite  $(\Delta) : y = 1$   
 $\ln(2) \approx 0,7$

EX : 7

$$g(x) = (x-1)e^x + x + 1$$

pour tout  $x \in [0, +\infty[$

1) calculer  $g'(x)$  et mq  $g$  et str  $\uparrow$  sur  $[0, +\infty[$

2) Mq :  $g(x) \geq 0$  pour tout  $x \geq 0$ .

3) soit :  $f(x) = \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} ; x \in \mathbb{R}^*$

3-a) Mq  $f$  est une fct impaire.

3-b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et interpréter le résultat.

3-c) Mq :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  et interpréter...

4) Mq :  $(\forall x > 0) f'(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} g(x)$